ECOLE DE MANAGEMENT EUROPÉEN

– CONCOURS 1987 – MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATH I Régime Économique **COEFFICIENT** : 4

JOUR : Mardi 2 juin 1987 **DURÉE** : 4 heures

Pour les calculs numériques, les candidats utiliseront les tables fournies avec le sujet

— I —

On note : $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A)

1) Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$ et $(A + \alpha I)(A + \beta I) = 0$.

2) On pose $M = A + \alpha I$ et $N = A + \beta I$.

a) Déterminer M^2 et N^2 en fonction de M et N. En déduire M^p et N^p pour p entier naturel.

b) Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $0 < k < n$.
Calculer MN et en déduire $M^k N^{n-k}$
(on remarquera que $k - 1 \geq 0$ et $n - k - 1 \geq 0$).

3) a) Exprimer A en fonction de M et N.

b) Comparer MN et NM. En déduire A^n en fonction de n.

B) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{u} = (x, y, z) & \longrightarrow & f(\vec{u}) = (x', y', z') \end{array}$$

avec

$$\begin{cases} x' = -6x + 2y - 2z \\ y' = -2x - y - z \\ z' = 8x - 4y + 2z \end{cases}$$

1) Trouver $\vec{i} = (a_1, b_1, c_1)$; $\vec{j} = (a_2, b_2, c_2)$; $\vec{k} = (a_3, b_3, c_3)$ tels que

$$\begin{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \\ f(\vec{i}) = -\alpha\vec{i}\ ;\ f(\vec{j}) = -\beta\vec{j}\ ;\ f(\vec{k}) = -\beta\vec{k} \end{cases}$$

où α et β sont les valeurs définies au (A) 1).

2) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites définies par :

$$\begin{cases} r_{n+1} = -6r_n - 2s_n + 8t_n \\ s_{n+1} = 2r_n - s_n - 4t_n \\ t_{n+1} = -2r_n - s_n + 2t_n \end{cases}$$

avec $r_0 = -7$; $s_0 = 5$; $t_0 = -3$.

On pose $\begin{cases} u_n = a_1 r_n + b_1 s_n + c_1 t_n \\ v_n = a_2 r_n + b_2 s_n + c_2 t_n \\ w_n = a_3 r_n + b_3 s_n + c_3 t_n \end{cases}$

les nombres a_i, b_i, c_i $(i = 1; 2; 3)$ étant ceux déterminés au (B) 1).

a) Exprimer u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} respectivement en fonction de u_n, v_n, w_n et en déduire une expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

b) Déterminer r_n, s_n, t_n en fonction de n.

3) On définit $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{pmatrix} r'_n \\ s'_n \\ t'_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Comparer r'_n, s'_n, t'_n et r_n, s_n, t_n.

Tournez la page S. V. P.

— II —

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Pour f et g éléments de E, on définit la fonction $f \times g$ par la relation :

$$(f \times g)(x) = f(x)\int_0^x g(t)dt + g(x)\int_0^x f(t)dt \qquad (\text{pour } x \in \mathbb{R}^+)$$

A)

1) Soit $f \in E$ et soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, exprimer $\int_0^x f(t)dt$ en fonction de F. En déduire que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_0^x f(t)dt \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que $\forall\, (f,g) \in E^2 \quad f \times g \in E$

3) Montrer que :

- $\forall\, (f_1, f_2) \in E^2, \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (f_1 \times f_2)(t)dt = (\int_0^x f_1(t)dt)(\int_0^x f_2(t)dt)$.

4) Soit $(f,g,h) \in E^3$.

a) Comparer $f \times g$ et $g \times f$.

b) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ exprimer $f \times (\lambda g + \mu h)$ à l'aide de $f \times g$ et de $f \times h$. Comparer $\lambda(f \times g)$, $(\lambda f) \times g$ et $f \times (\lambda g)$.

c) On note $a = f \times (g \times h)$ et $b = (f \times g) \times h$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ comparer $\int_0^x a(t)dt$ et $\int_0^x b(t)dt$.
En déduire que $f \times (g \times h) = (f \times g) \times h$.

B) *La question 1) est indépendante de la question 2).*

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad x(x+1)f'(x) + f(x) = (x+1)^2 e^x.$$

On note

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{array}$$

a) Calculer $(f' \times g)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

b) En utilisant la formule du A) 3) montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{(x+1)(e^x - 1)}{x}$$

2) On rappelle que $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :
$f^{[1]} = f$ et, pour $n \geq 2$, $f^{[n]} = f^{[n-1]} \times f$.

a) Montrer par récurrence :
$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \int_0^x f^{[n]}(t)dt = (\int_0^x f(t)dt)^n$ (où $x \in \mathbb{R}^+$). En déduire une expression de $f^{[n]}(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\int_0^x f(t)dt$.

b) On définit h_n (resp. h) sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{[k]}}{k!}(x) \quad (\text{resp. } h(x) = f(x)e^{\int_0^x f(t)dt})$$

Donner une expression de $h_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\int_0^x f(t)dt$.
Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(x)$$

et exprimer cette limite en fonction de $h(x)$.
Déterminer $\int_0^x h(t)dt$ en fonction de $\int_0^x f(t)dt$.

I.E.C.S.
Opt économ. - Math 1
page 323
1987